Алгоритмы
и структуры данных

Курс «Технология программирования»

Кафедра управления и информатики НИУ «МЭИ»

Осень 2015 г.

Алгоритмы и структуры данных

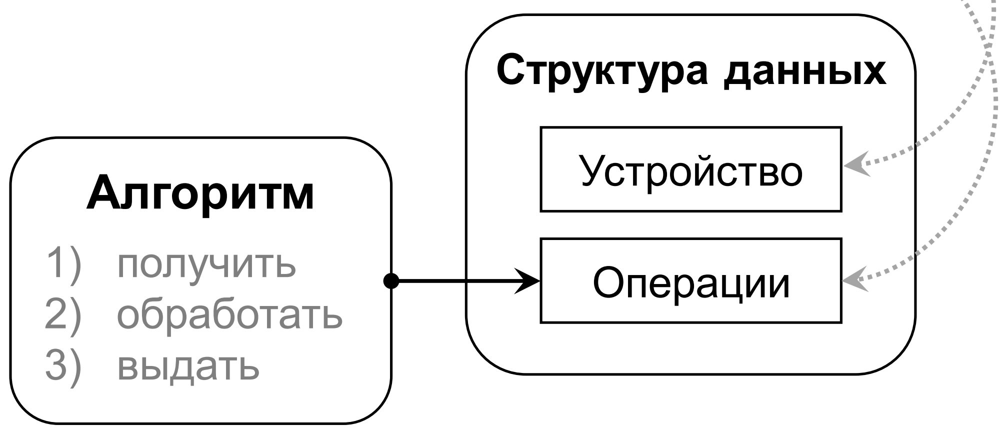
- Алгоритм —

  набор инструкций вычислителя, описывающих
  порядок выполнения действий для достижения результата
  при любых входных данных за конечное число действий.

- Структура данных —

  способ представления данных в памяти
  для их <u>эффективного</u> использования в программе.

Как это понимать,
измерять,
сравнивать?



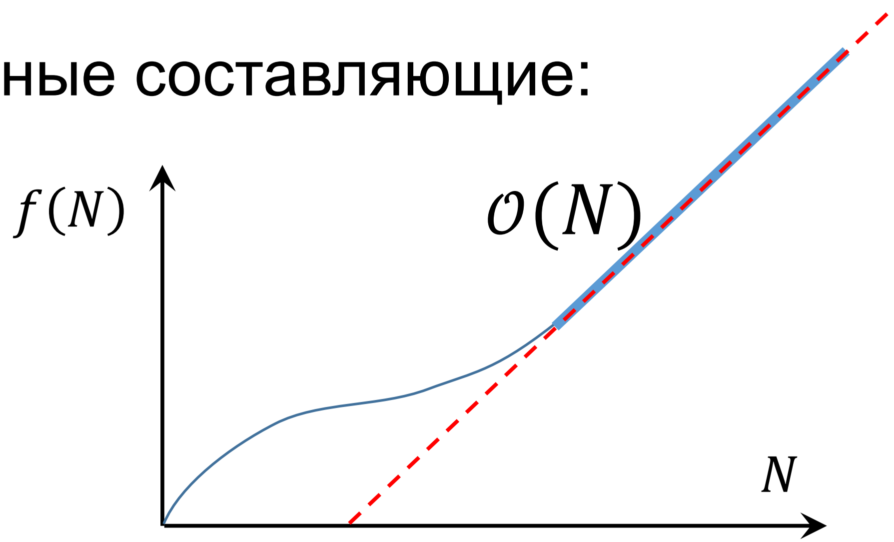
Алгоритмическая сложность

- Асимптотическая оценка сложности алгоритма.
- Сложность — число элементарных операций f при объеме данных N.
  - Элементарная операция едина для класса алгоритмов.
    - Обычно самая вычислительно сложная.
    - Пример: для сортировок — сравнение элементов.
  - Объем данных:
    - Обычно количество элементов N.
    - Иногда характеризуется несколькими числами.
      - *Пример:* для умножения матриц $A^{N \times M} \cdot B^{M \times K}$ — три размера N, M и K.

Асимптотическая оценка

* с практической точки зрения

- Показывает характер $f(N)$ при $N \to \infty$.
    - При малых N «не работает»!
- Учитывает самую быстрорастущую составляющую:
    - $5 + 3N + 3N^2 + \frac{1}{2}N^3 \to \mathcal{O}(N^3)$
- Не учитывает постоянные составляющие:
    - $100500 \to \mathcal{O}(1)$
    - $300N \to \mathcal{O}(N)$
    - $\log_5 N \to \mathcal{O}(\log N)$, $\log_{200} N^2 \to \mathcal{O}(\log N)$
        - $\log_a N^b = b \cdot \log_a N$



Линейный поиск

- Алгоритм:

  для каждого элемента коллекции**:**

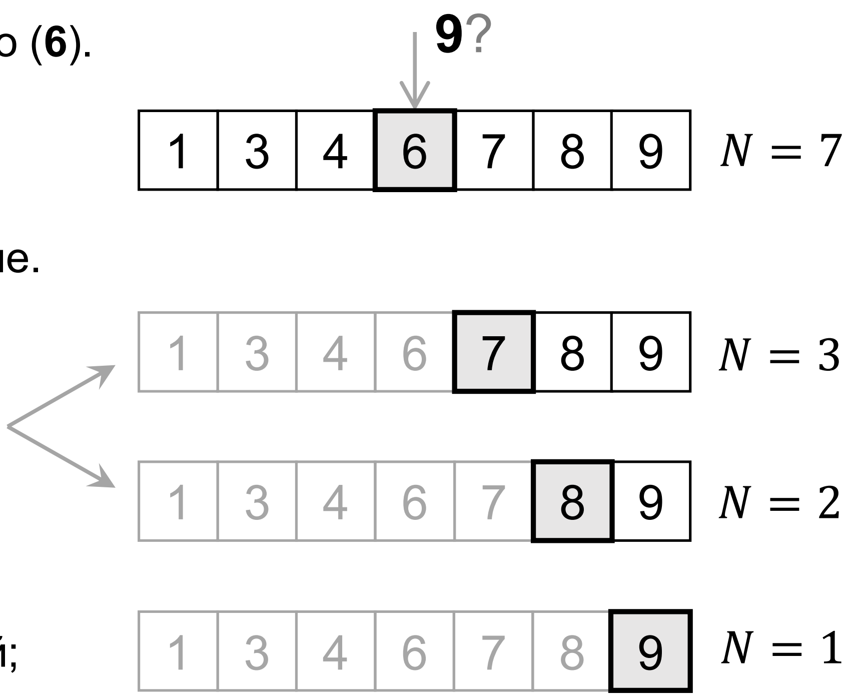
      если это искомый элемент**, то**

          завершить поиск.

- Оценка сложности:
  - Что есть элементарная операция?
    - Сравнение элементов.
  - Сколько нужно сравнений?
    - В контейнере N элементов, искомый может быть последним — $\mathcal{O}(N)$.
- Использует только доступ к очередному элементу.
  - Не предъявляет особых требований к структуре данных.

Двоичный поиск (binary search)

- Искомый элемент (**9**) меньше среднего (**6**).
- В упорядоченном массиве
  большие элементы правее меньших.
  - ➢ Искомый элемент в правой половине.
- На каждом шаге область поиска (часть массива) сокращается вдвое.
- Случай (этап), когда $N = 1$:
  - ✓ единственный элемент — искомый;
  - × искомый элемент отсутствует.
- Применим к упорядоченным массивам.
- Использует доступ к элементам по индексу.



Быстрее линейного?

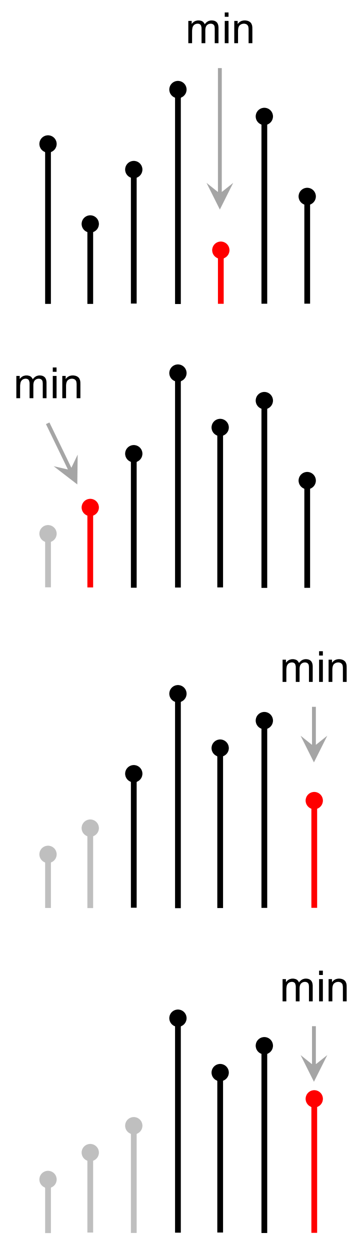
«Анализ» асимптотики двоичного поиска

- Что есть элементарная операция?
  - Сравнение элемента с искомым.
- Сколько будет сравнений?
  - Столько же, сколько шагов.
- Сколько будет шагов?
  - Столько же, сколько раз можно (нацело) поделить N на 2, пока не останется 1.
    - В какую степень возвести 2, чтобы получилось N.
      - Логарифм! $\mathcal{O}(\log N)$
  - Или меньше, если искомый элемент встретится раньше.

Сортировка вставками (insertion sort)

```
void insertion_sort(vector<double>& data)
{
    if (data.empty())
        return;
    for (unsigned int i = 0; i < data.size() – 1; ++i) {
        // Найти наименьший из оставшихся:
        unsigned int min_index = i;
        for (unsigned int j = i + 1; j < data.size(); ++j) {
            if (data[j] < min_index)
                min_index = j;
        }
        // Поместить минимальный элемент на место текущего.
        swap(data[i], data[min_index]);
    }
}
```

Обмен значений a и b.



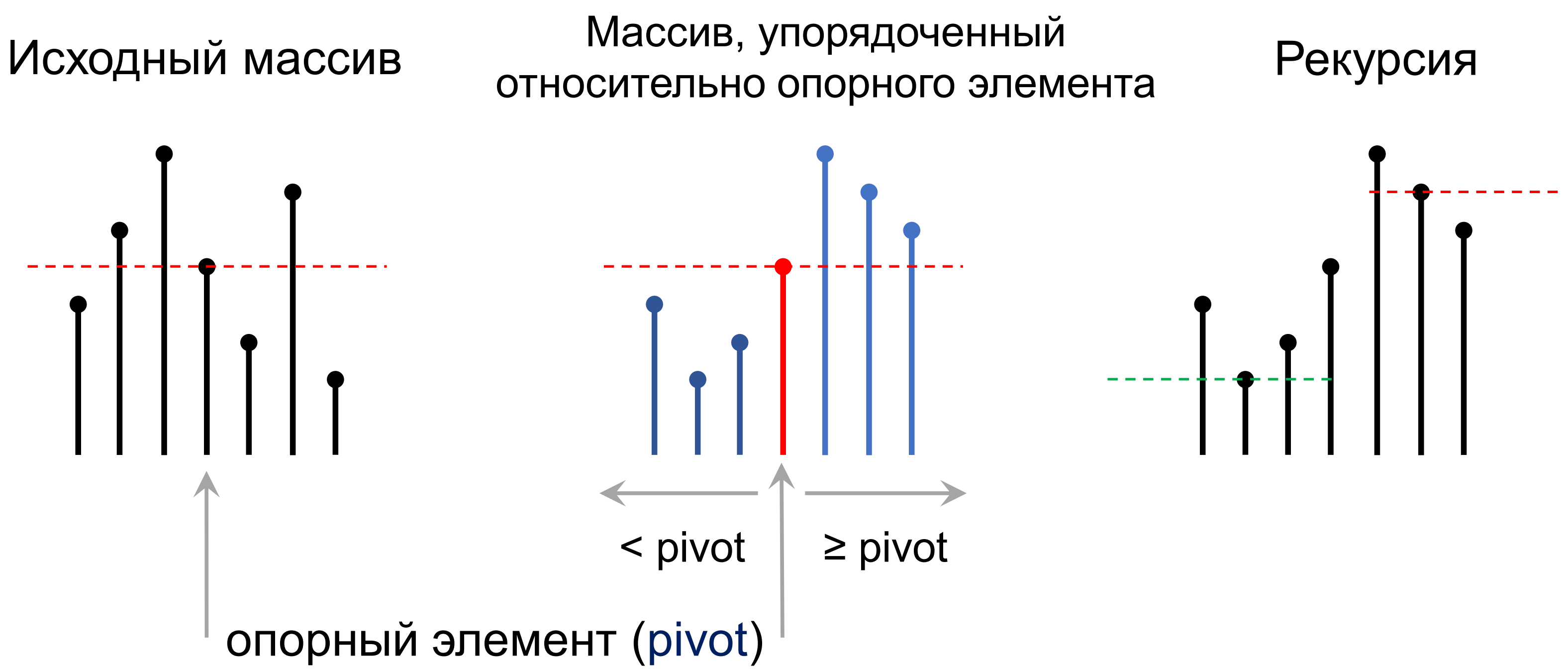
Сортировка вставками

- Что есть элементарная операция?
  - Сравнение элементов (при поиске наименьшего).
- Сколько будет сравнений?
  - В 1-м проходе — $(N-1)$, во 2-м проходе — $(N-2)$, и т. д.
  - Проходов $(N-1)$.
  - Арифметическая прогрессия:

$$f(n) = (N-1)\frac{\big(1+(N-1)\big)}{2} = \frac{1}{2}N^2 - \frac{1}{2}N$$

- Сложность: $\mathcal{O}\left(\frac{1}{2}N^2 - \frac{1}{2}N\right) = \mathcal{O}\left(\frac{1}{2}N^2\right) = \mathcal{O}(N^2)$
  - В любом случае.
  - Оптимизация: если в проходе не было обменов, закончить.
    - Если массив отсортирован, сложность снижается до $\mathcal{O}(N)$.

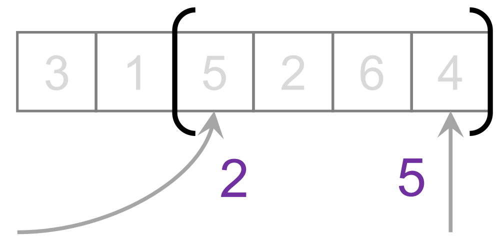
«Быстрая» сортировка



- Деление может быть не на равные части.
- Может потребоваться переместить опорный элемент.

Реализация «быстрой» сортировки

Алгоритм обрабатывает часть массива data:




```
void quick_sort(
        vector<double>& data, unsigned int from, unsigned int to)
{
```

1) Распределить элементы относительно опорного (pivot).

```
        const unsigned int pivot = partition(data, from, to);
```

2) Применить алгоритм к элементам, меньшим опорного.

```
        quick_sort(data, from, pivot – 1);
```

3) Применить алгоритм к элементам, большим или равным опорному.

```
        quick_sort(data, pivot + 1, to);
}
```

Распределение элементов относительно опорного

Перед этой ячейкой
помещаются элементы,
меньшие опорного.

все элементы, кроме опорного

9	8	7	6	5	4	3	2	1

Меньше 5?

Новый индекс опорного элемента. По нему делится массив.

Реализация «быстрой» сортировки (продолжение)

```
unsigned int partition(vector<double>& data, unsigned int from, unsigned int to)
{
    unsigned int const pivot_index = from + (to – from) / 2;
    double       const pivot_value = data[pivot_index];

    swap(data[pivot_index], data[to]);

    unsigned int new_pivot_index = from;
    for (unsigned int i = from; i < to; ++i)
        if (data[i] < pivot_value) {
            swap(data[i], data[new_pivot_index];
            ++new_pivot_index;
        }

    swap(data[new_pivot_index], data[to]);

    return new_pivot_index;
}
```

Выбор опорного элемента.

- Подходит любой.
- Производительность?
- Варианты:
    - посередине;
    - случайный;
    - медиана из начального, конечного и посередине.

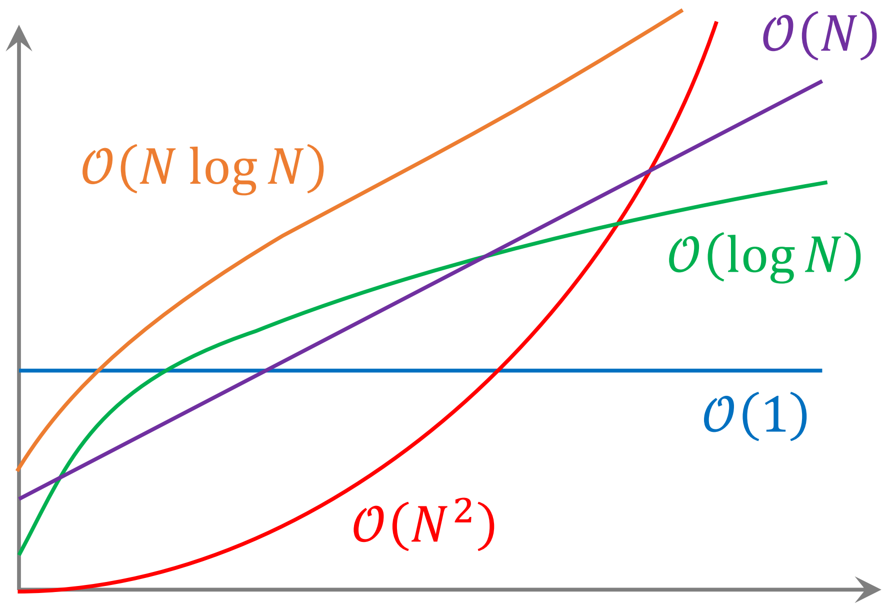
Анализ асимптотики «быстрой» сортировки

- Элементарная операция — сравнение элементов.
- На каждом шаге обрабатываются все N элементов.
- Сколько шагов-разбиений?
  - Сколько раз можно разбить N на две (неравные) части?
    - Отделяя по одному элементу, N раз.
    - Худший случай: $\left(N^{\text{сравнений}}/_{\text{разбиение}}\right) \times (\text{N разбиений}) \rightarrow \mathcal{O}(N^2)$.
      - Массив, отсортированный в обратном порядке.
  - Когда число разбиений минимально?
    - При делении пополам — $\log_2 N$ шагов.
    - Лучший случай: $\left(N^{\text{сравнений}}/_{\text{разбиение}}\right) \times (\log_2 N\ \text{разбиений}) \rightarrow \mathcal{O}(N \log N)$.
- Лучший случай статистически — средний:

$$\mathcal{O}(N \log N)$$

Классы сложности

- Постоянная $\mathcal{O}(1)$
- Линейная $\mathcal{O}(N)$:
  - цикл.
- Логарифмическая $\mathcal{O}(\log N)$:
  - при дроблении задачи на каждом шаге.
- «Лог-линейная» $\mathcal{O}(N \log N)$
- Полиномиальная $\mathcal{O}(N^{const})$:
  - вложенные циклы.



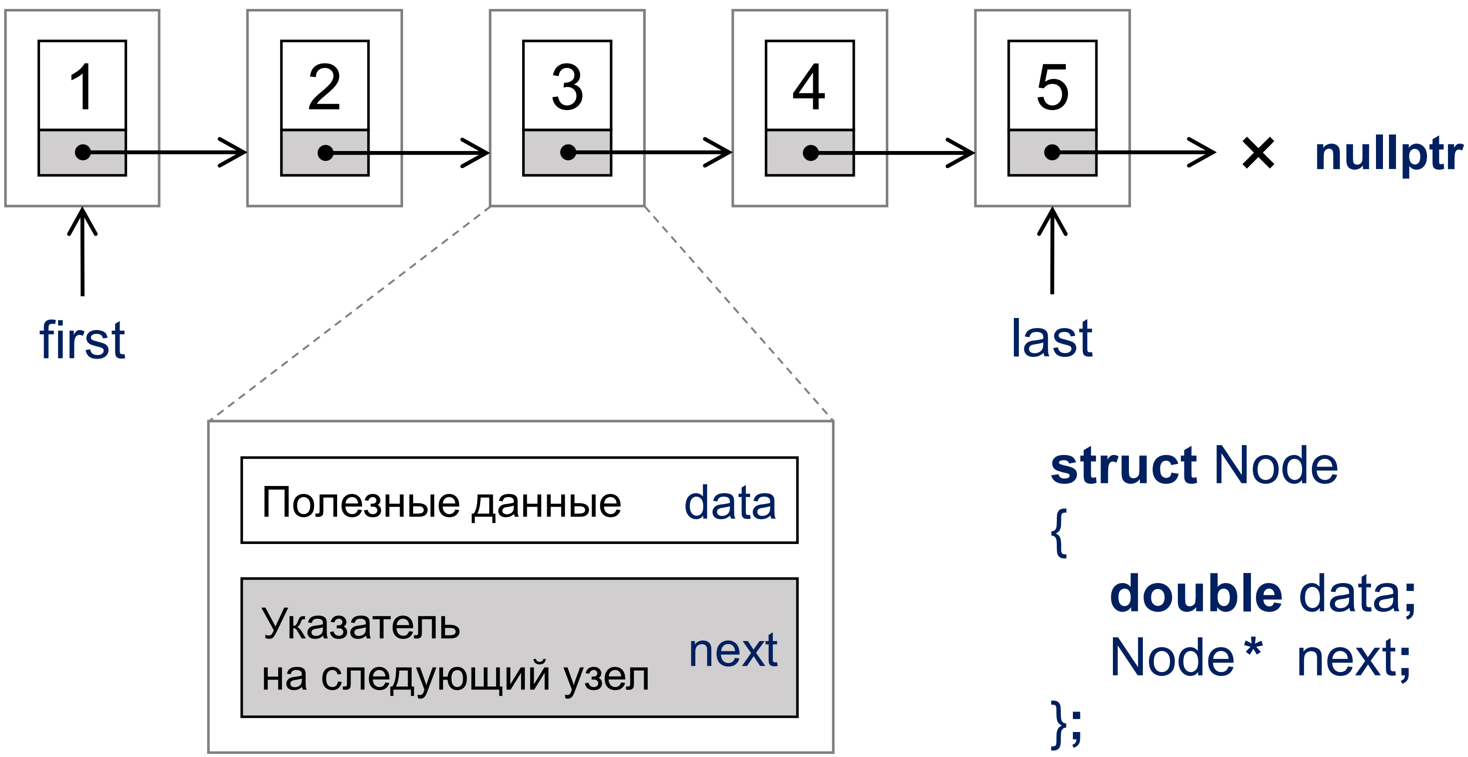
➢ Сложности вложенных действий перемножаются.

➢ Из сложностей последовательных действий остается наивысшая.

Массив как структура данных

- **Организация:**
  непрерывный блок памяти с элементами друг за другом.
- **Операции:**
  - доступ по индексу — $\mathcal{O}(1)$;
  - вставка и удаление элементов — $\mathcal{O}(N)$:
    - сдвинуть каждый элемент в сторону за $\mathcal{O}(N)$;
    - при вставке: поместить элемент по индексу за $\mathcal{O}(1)$;
    - если блок памяти заполнен, требуется скопировать все элементы в новый за $\mathcal{O}(N)$, а старый освободить;
  - поиск и сортировка только алгоритмами.

Односвязный список (singly-linked list)



Элемент (узел, node)

```
struct Node
{
    double data;
    Node*  next;
};
```

Класс связанного списка

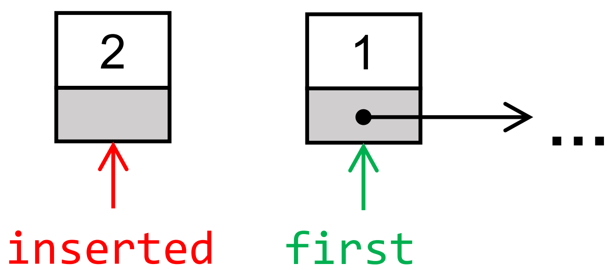
- Класс связывает данные и способы их обработки:
  - структура (**struct**)
  - и функции над ней.
- Данные называются полями, или атрибутами.
- Функции называются методами.
- Зачем?
  - Оперировать списком как единым целым.
  - Инициализация и очистка автоматически.

```
struct LinkedList
{
    Node* first_;
    Node* last_;
    size_t size_;

     LinkedList( );
    ~LinkedList( );

    void push_front(double item);
    void clear( );
    void get_by_index( size_t index );
    // …
};
```

Вставка элемента:
а) в начало списка

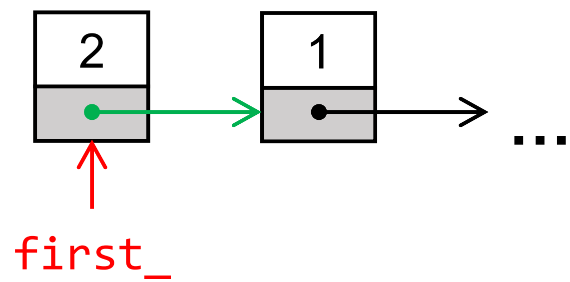
Было:

список и новый узел



Стало:

список с новым узлом в начале



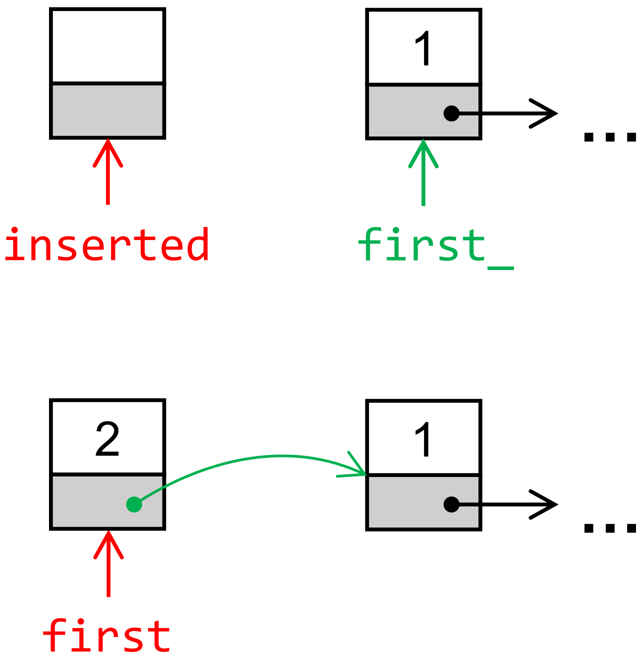

```
inserted->next = first_;
first_ = inserted;
```

`pointer->field` — это `(*pointer).field`

❖ Один цвет — один адрес (значение указателя), кроме черных и серых (которые не важны).

Реализация вставки в список

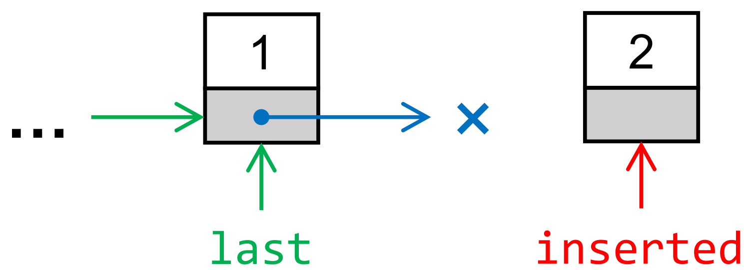
```
void LinkedList::push_front(double value)
{
    Node* inserted = new Node;
    inserted->value = value;
    inserted->next = first_;
    first_ = inserted;
    if (last_ == nullptr) {
        last_ = inserted;
    }
    ++size_;
}
```



Вставка элемента:
б) в конец списка

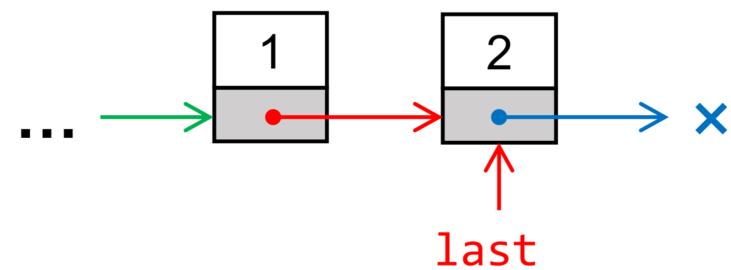
Было:

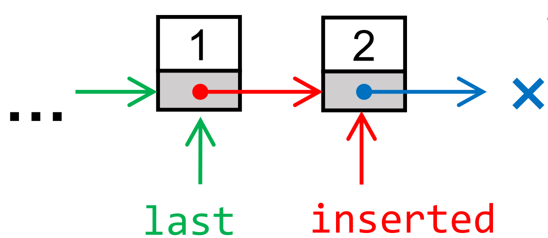
список и новый узел



Стало:

список с новым узлом в конце

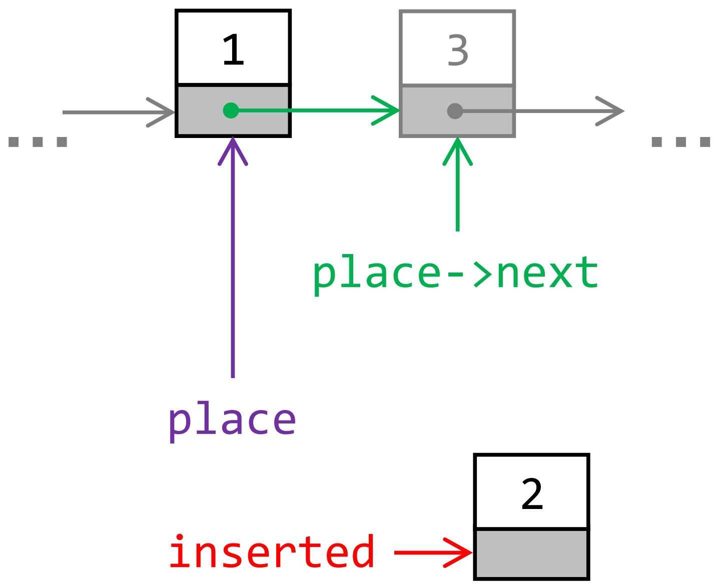




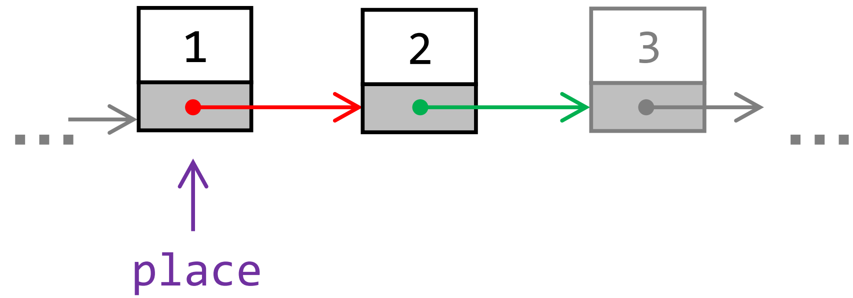

```
inserted->next = nullptr;
last_->next = inserted;
last_ = inserted;
```

Вставка элемента:
в) в произвольное место

Было:
список, новый узел
и указатель на узел в списке



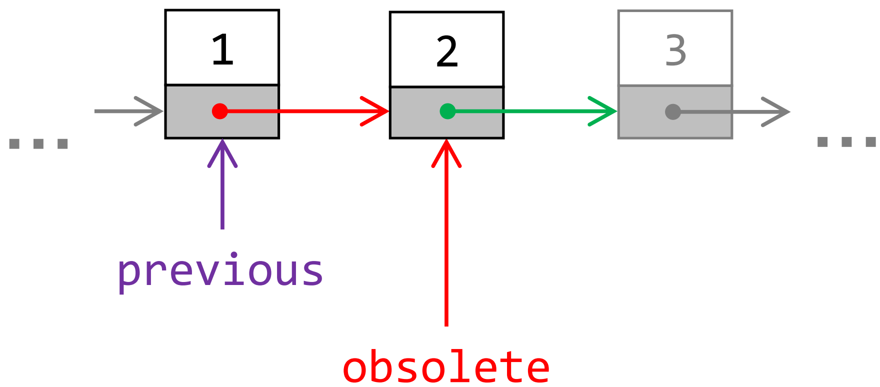
Стало:
список с новым узлом в конце



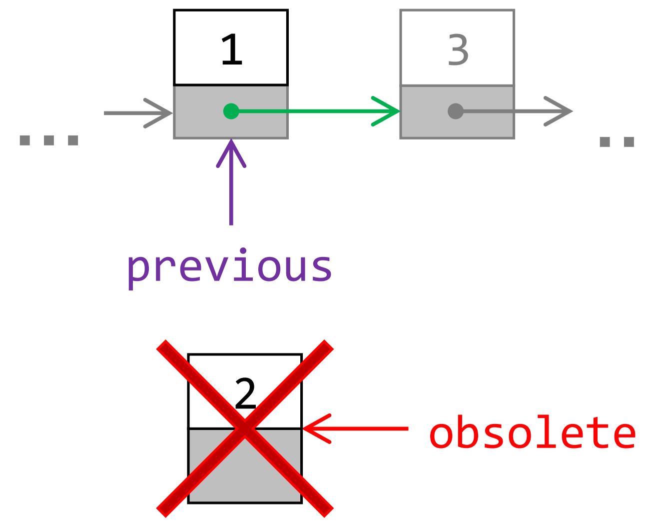

```
inserted->next = place->next;
place->next = inserted;
```

Удаление элемента

Было:
список и узел к удалению



Стало:
список без указанного узла

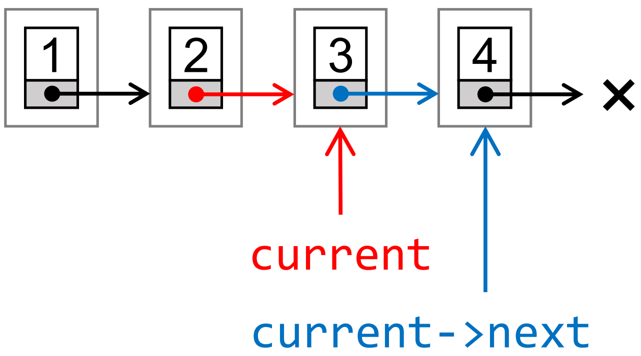



```
previos->next = obsolete->next;
delete obsolete;
```

Проход по списку (enumeration)

- Размер списка неизвестен:

```
Node* current = first_;
while (current)
     current = current->next;
```



- До элемента № `index`:

```
Node* current = first_;
for (i = 0; i < index; ++i)
     current = current->next;
```

- Интервал [`first`; `last`) или любой другой:

```
Node* current = first_;
while (current != last_)
   current = current->next;
```

  - ➢ Можно проверять `current`:

```
while (current && current != last_) {
    …
}
```

Реализация очистки списка

```
void LinkedList::clear()
{
    Node* current = first_;
    while (current) {
        Node* victim = current;
        current = current->next;
        delete victim;
    }
    first_ = last_ = nullptr;
    size_ = 0;
}
```

Изначально список пуст.

```
LinkedList::LinkedList()
    : first_{nullptr}
    , last_{nullptr}
    , size_{0}
{
    // first_ = last_ = nullptr;
    // size = 0;
}
```

Одни методы могут вызывать другие.

```
LinkedList::~LinkedList() {
    clear();
}
```

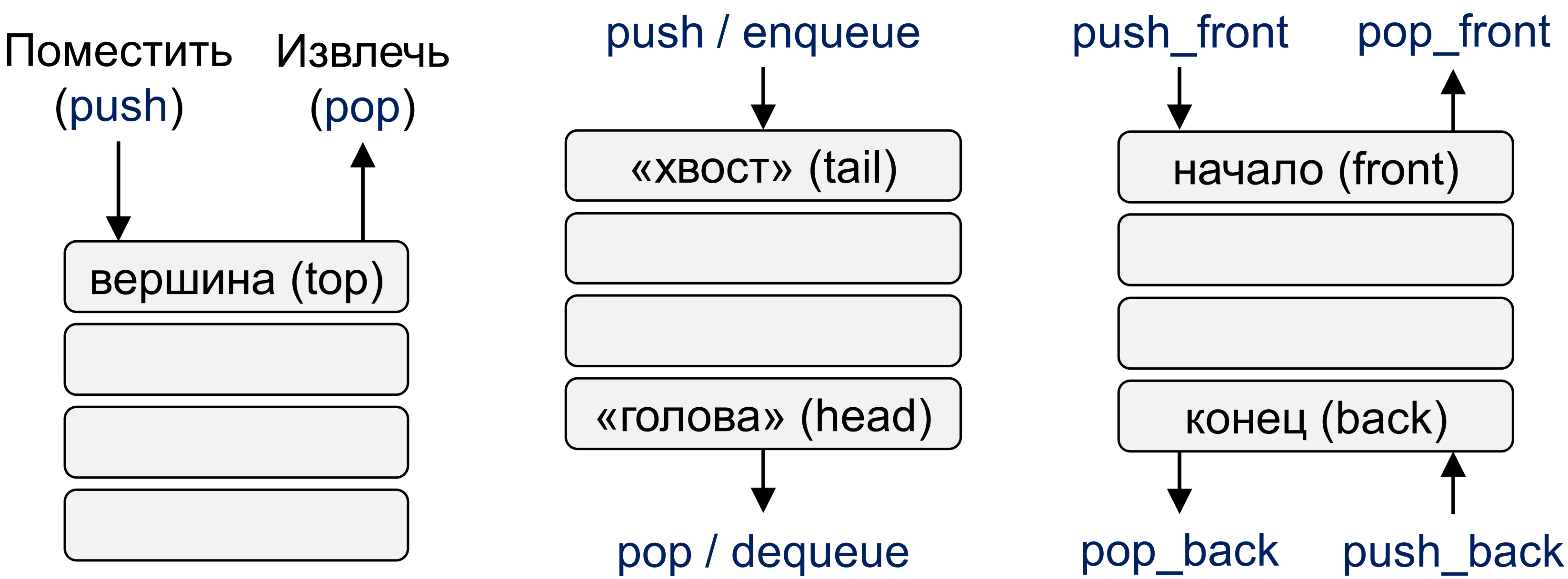
Производительность связанных списков

- Доступ по индексу: $\mathcal{O}(N)$.
  - В односвязном списке — доступ только к следующему элементу.
- Вставка и удаление элементов: $\mathcal{O}(1)$.
  - Соединение списков за $\mathcal{O}(1)$.
- При изменении списка адреса узлов сохраняются.
  - Доступ по адресу за $\mathcal{O}(1)$.
- Расход памяти строго под число элементов,
  - но есть накладные расходы на каждый узел,
    - особенно в двусвязных списках.
- Никогда не требуется копировать данные.

```
struct Node
{
    double data;
    Node *  next;
    Node *  previous;
};
```

Стек, очередь и дек

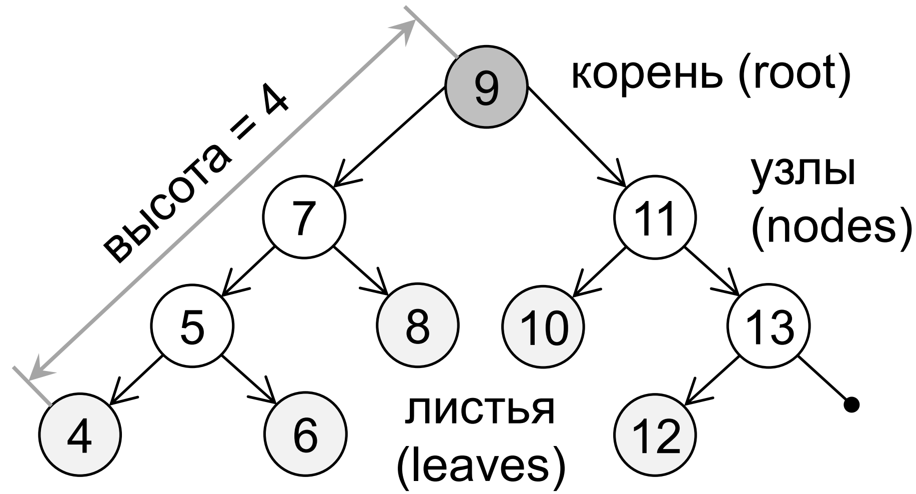
Стек (stack) **Очередь (queue)** **Дек (dequeue)**



Массив или связанный список с ограниченным набором операций.

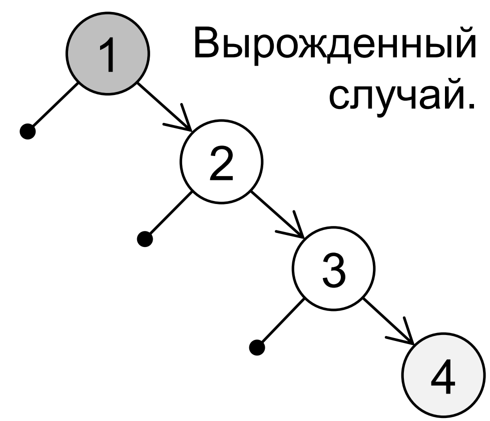
Деревья (trees)

- У каждого узла, кроме **корня,** один родитель.
- Узлы без потомков называются **листьями** (left == right == **nullptr**).
- **Высота** дерева считается по самой длинной ветви.
- Каждая ветвь — полноценное дерево.
  - Алгоритмы обработки часто рекурсивны.




```
struct Node
{
    double data;
    Node* left;
    Node* right;
    Node* parent;
};
```

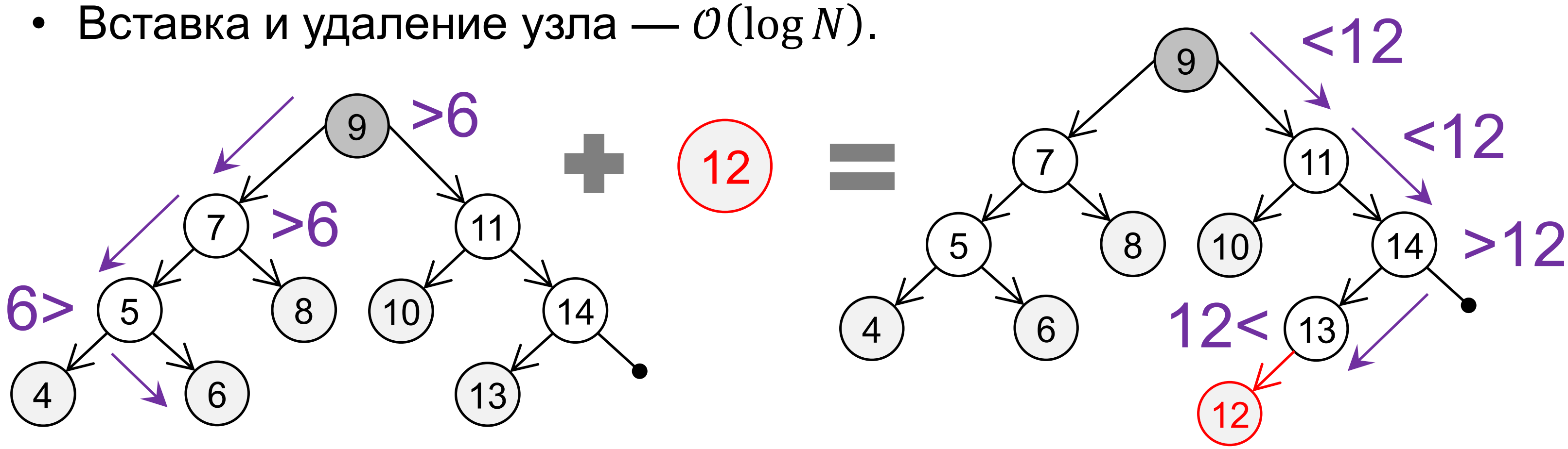
Необязательно.



Двоичное дерево (binary tree)

- Не больше двух дочерних узлов.
  - Значения узлов слева меньше родительского,
    значения узлов справа **НЕ** меньше родительского.
- **Сбалансированное** двоичное дерево

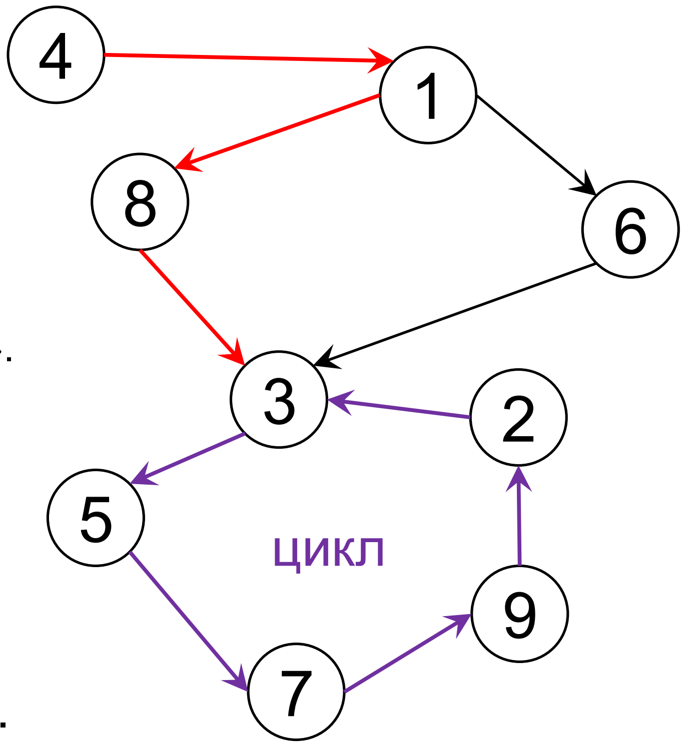
  содержит в левой и правой ветви равное число узлов,
- Иначе: узел делит дочерние на меньшие и большие его,
  - как любой элемент упорядоченного массива.
    - Поиск в двоичном дереве — двоичный поиск за $\mathcal{O}(\log N)$.
- Вставка и удаление узла — $\mathcal{O}(\log N)$.



Графы (graphs)

- **Граф** *(в программировании)* —

  структура данных, в которой *N* узлов связаны произвольно.
    - По K связей в среднем.
- Типовые задачи:
    - поиск пути между узлами:
        - кратчайшего;
        - с посещением заданных узлов;
            - всех — «задача коммивояжера».
    - поиск циклов в графе.
- Алгоритмы на графах:
    - рекурсивные,
        - без упрощения задачи.
    - Встречаются $\mathcal{O}(e^N)$, $\mathcal{O}(N!)$, $\mathcal{O}(K^N)$.



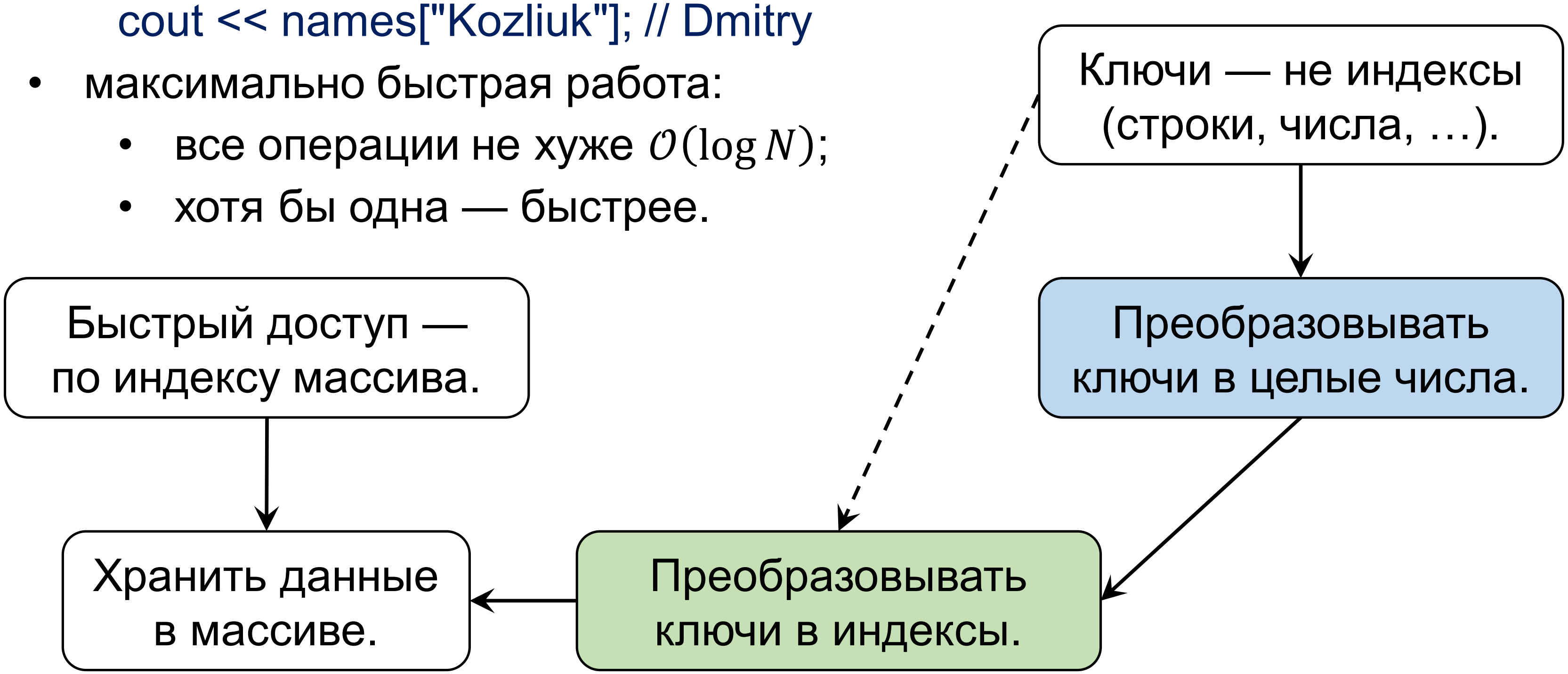
Хэш-таблица (hash table)

Задача:

- доступ по ключу любого типа (ассоциативный массив, «словарь»):

```
names["Kozliuk"] = "Dmitry";
cout << names["Kozliuk"]; // Dmitry
```

- максимально быстрая работа:
  - все операции не хуже $\mathcal{O}(\log N)$;
  - хотя бы одна — быстрее.



Хэширование

```
int result = 7;
for (unsingned int i = 0; i < input.size(); ++i)
    result = 31 * result + input[i];
```

- Хэш-функция

  ```
  hash<string> hash_function;
  hash_function("Dmitry") == 3512122310
  hash_function("Vadim") == 4155307891
  ```

- Коллизии —

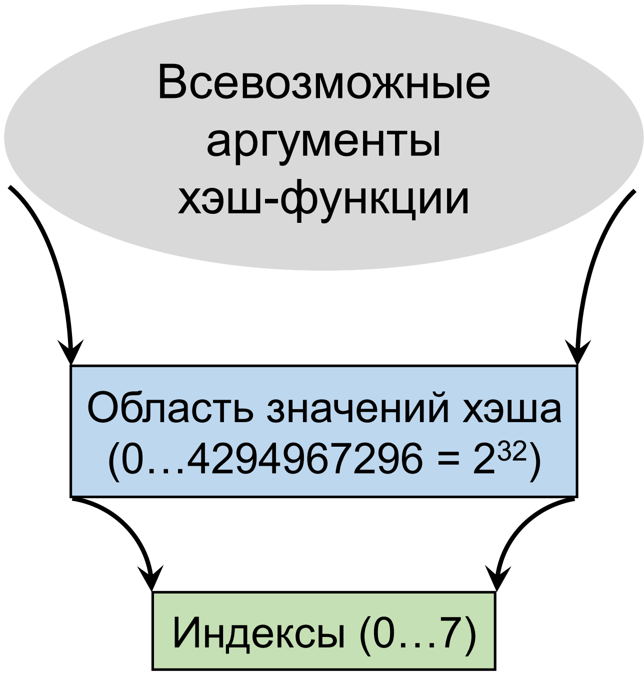
  совпадения значений хэш-функции
  для различных аргументов.

- Получение индекса из хэша

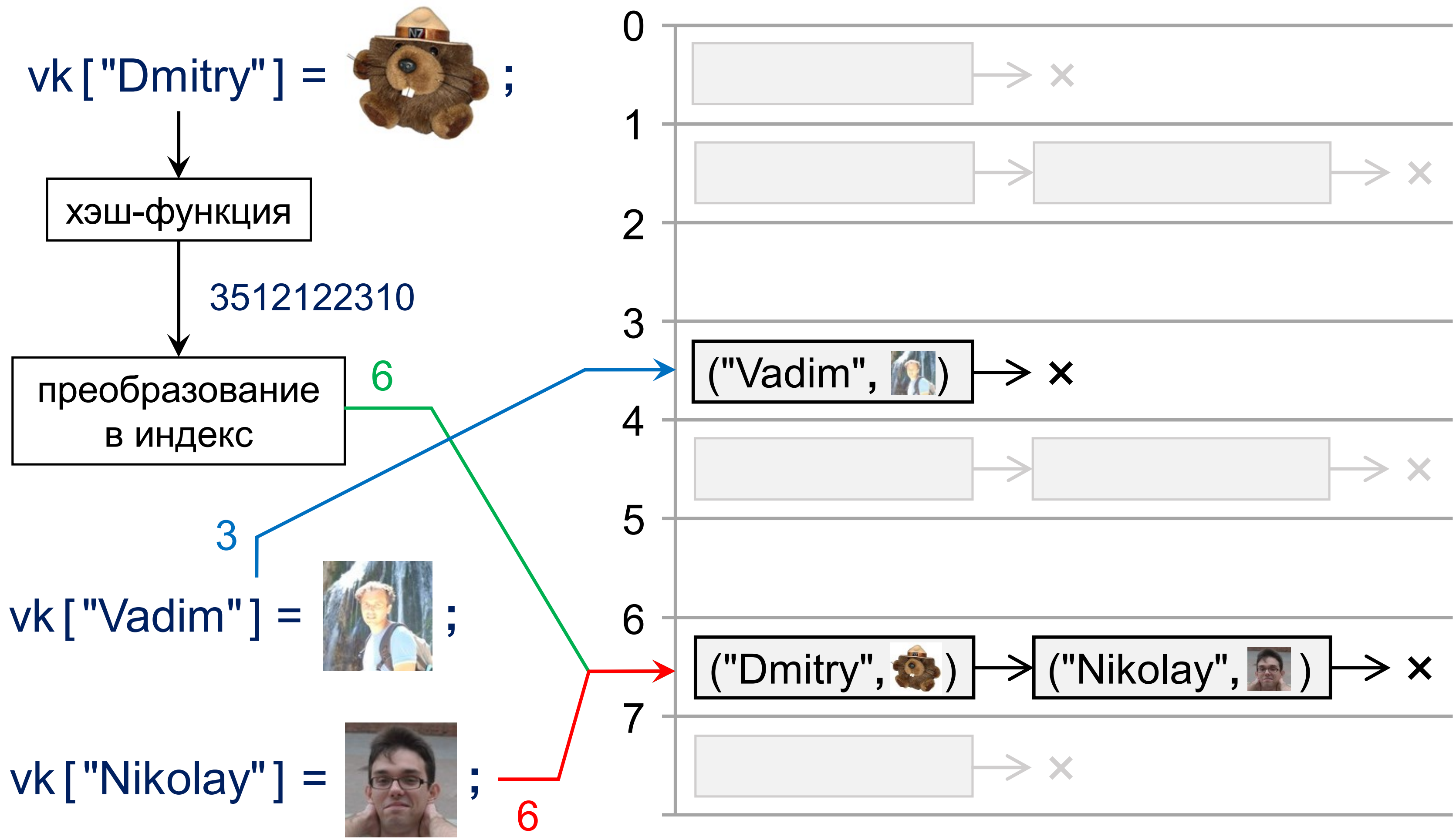
  ```
  dmitry_index = 3512122310 % 8;  // 6
  vadim_index = 4155307891 % 8;  // 3
  ```

  - Дополнительные коллизии

    ```
    hash_function("Nikolay") % 8 == 6
    ```



Устройство хэш-таблицы (прямая адресация)



Устройство хэш-таблицы (открытая адресация)

Производительность хэш-таблиц

- Доступ по ключу: $\mathcal{O}(1)$
- Вставка и удаление элементов: $\mathcal{O}(1)$
- Скорость деградирует до $\mathcal{O}(N)$ из-за коллизий;
  - выбор хэш-функции критически важен!
  - При больших N скорость всегда немного снижается:

    время доступа $\mathcal{O}(1)$ = поиск ячейки $\mathcal{O}(1)$ + поиск в коротком списке $\mathcal{O}(N)$.
- Существенный перерасход памяти под пустые ячейки $\mathcal{M}(N)$.
  - Больше ячеек ⇒ меньше коллизий ⇒ выше скорость.
  - Нужен баланс между расходом памяти и скоростью.

Литература к лекции

- Роберт Седжвик. *Фундаментальные алгоритмы на C++.*
- Томас Х. Кормен. *Алгоритмы. Вводный курс.*
- Томас Х. Кормен. *Алгоритмы: построение и анализ.*
- Стивен Скиена. *Алгоритмы. Руководство по разработке.*
- http://sorting-algorithms.com
- Programming: Principles and Practices Using C++:
  - раздел 20.4 — связанный список, алгоритмическая сложность;
  - раздел 20.6 — двоичное дерево, хэш-таблица.
- Авторский конспект 2013 г.
  - Лекция 5 «Алгоритмы сортировки»
    - Есть демонстрационная программа.
  - Лекция 6 «Динамические структуры данных»
    - Несколько опережает программу 2014 г. в отношении C++.

❖ Точные выходные сведения книг — на странице курса.