

Метод Гаусса решения СЛАУ $Ax = b$

Идея метода:

- 1) вычитанием верхних строк из нижних обнулить элементы под главной диагональю;
- 2) в последней строке останется только одно неизвестное, которое сразу же можно вычислить;
- 3) в остальных строках (снизу вверх) содержится только по одной новой неизвестной, а также уже найденные неизвестные.

Есть варианты метода и для вычислительно неудобных случаев — рассматривается простейший

Амосов, Дубинский, Копченова «Вычислительные методы для инженеров» — М.: изд-во МЭИ — 2003 г. — 596 с.

Алгоритм метода Гаусса

Прямой ход: обнуление элементов под главной диагональю

Для строк $i = \overline{1 \dots N}$:

Проверить, что $a_{i,i} \neq 0$,

иначе поменять текущую строку с подходящей (из нижних).

Для строк $j = \overline{i + 1 \dots N}$:

вычесть i -ю строку с коэффициентом $k = a_{j,i}/a_{i,i}$

Обратный ход: вычисление неизвестных $\{x_i\}_{i=1}^N$

$$x_N = b'_N / a'_{N,N}$$

Для неизвестных $i = \overline{(N - 1) \dots 1}$:

$$x_i = 1/a'_{i,i} \cdot (b'_i - \sum x_\nu a'_{i,\nu})$$

Метод Гаусса (пример)

СЛАУ: $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 \\ 3x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$, то есть: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

Прямой ход:

Умножим первую строку на $k = 3/1 = 3$ и вычтем её из второй:

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, b' = \begin{bmatrix} 5 \\ -9 \end{bmatrix}$$

Обратный ход:

$$x_2 = -9 / -2 = 4,5$$

$$x_1 = 1/1 \cdot (5 - 2 \cdot 4,5) = -4$$